

## EKOLOJİK BİR MODELİN KAOTİK DİNAMİKLERİ

Rukiye KARA<sup>1</sup> ve Mehmet CAN<sup>2</sup>

### ÖZET

Bu çalışmada aynı ekolojide yaşayan ve türler arasındaki ilişki ile bir besin zinciri oluşturan üç farklı türün oluşturduğu bir popülasyon modeli ele alınmıştır. Modelde kaosa gidişteki önemli basamaklardan birisi olan periyot katlama incelenmiştir. Ayrıca sistemin çeşitli parametre değerlerindeki denge noktaları ve bu denge noktalarına karşılık gelen öz değerler bulunup sistemin parametre değerlerine göstermiş olduğu hassasiyet gözlenmiştir.

*Anahtar Kelimeler:* Periyot Katlama, Kaos, Popülasyon Dinamikleri

### GİRİŞ

Ekolojik sistemler üzerinde yapılan deneysel ve teorik çalışmalar, bu sistemlerin nonlineer dinamiğin modelleri ile tanımlanabildiğini göstermektedir. Günümüz doğa bilimlerindeki bir diğer eğilim, birbiriyle ilişkili çok sayıda basit canlıların oluşturduğu sistemlerin, çoğunlukla karmaşık ya da kaotik olabilen hareketlerini incelemektir. Aynı etkileşim ağının bireyleri olan türlerin dinamiklerinin, birbirlerine olan etkilerinin araştırılması amacıyla, popülasyon ekolojisi üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Doğal ekolojik sistemlerdeki etkileşim ağı, yönelimsel bir ilişki ile birbirine bağlanan türlerden oluşan besin zincirleri ya da besin ağlarıdır. Bu tür sistemler, genellikle, lineer olmayan türden bir dinamik davranış gösterirler. Pek çok karmaşık ve nonlineer sistem, bilgisayar simülasyon teknikleri kullanılarak başarıyla incelenmiştir.

Bu çalışmada aşağıda verilen besin zinciri modeli ele alınmıştır. Verilen sistemin dinamikleri ve başlangıç koşullarında yapılan değişimlere gösterdiği hassasiyet incelenmiştir. Verilen besin zinciri modelinin, bu hassas dinamikleri üretebildiği görülmüştür. Ayrıca, bu çalışma, çok sayıda türü içeren basit model sistemlerin öngörülemez ve karmaşık davranış üretebildiği görüşünü desteklemektedir

$$\begin{aligned}x' &= ax\left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{bxy}{x + d_1}, \\y' &= -cy + dxy - \frac{eyz}{y + d_2}, \\z' &= -fz + gyz\end{aligned}\tag{1}$$

Model sistem (1) deki  $a, b, c, d, d_1, d_2, e, f, g$  ve  $K$  parametreleri pozitif değerlidir.  $X$  av popülasyonunu  $y$  ve  $z$  ise avcı popülasyonlarını tanımlamaktadır.  $Y$  avcısı  $x$  ile  $z$  avcısı ise  $y$  ile beslenmektedir. Avcı popülasyonları Holling fonksiyonel tepkisi kullanılmıştır. Benzer bir modeldeki kaos daha önce Hastings ve Powell tarafından incelenmiştir.

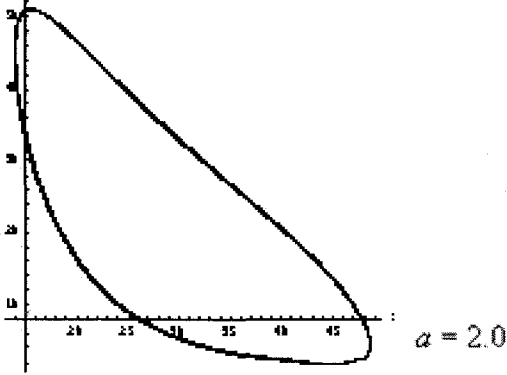
<sup>1</sup> İstanbul Teknik Üniversitesi, Matematik Bölümü, 34469 İstanbul, Türkiye, 0212 5408334, ru\_kara@yahoo.com

<sup>2</sup> International University of Sarajevo, Faculty of Engineering and Natural Sciences, Paromlinska 66, 71000 Sarajevo, Bosnia Herzegovina, mcan@ius.edu.ba

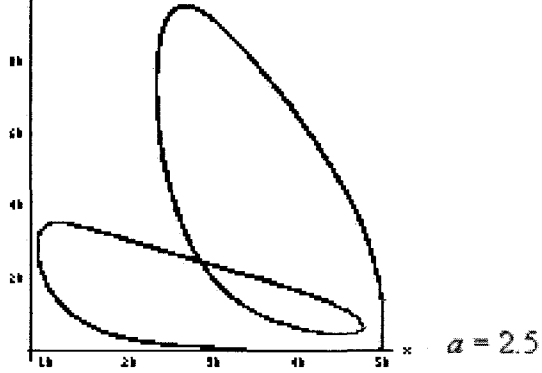
**SAYISAL ÇÖZÜMLER:**

Model sistem (1) in  $b = 1, c = 1, d = 0.05, e = 1, f = 1, g = 0.05, d_1 = 10, d_2 = 10, K = 50$   $1 < a < 10$  parametre değerleri ve  $x_0 = 0.01, y_0 = 0.03, z_0 = 0.03$  başlangıç koşulları altında “a” parametresinde yapılan ufak değişimler aşağıda gösterilen periyot katlamayı doğurmuştur.

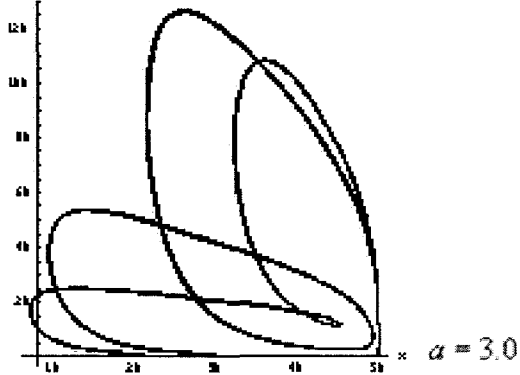
$c, d, e, f, g, d_1, d_2, t_3 = [2, 1, 1, 0.05, 1, 1, 0.05,$



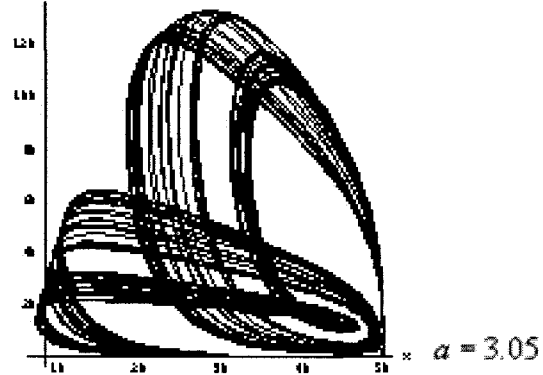
$, d, e, f, g, d_1, d_2, t_3 = [2.5, 1, 1, 0.05, 1, 1, 0.05$



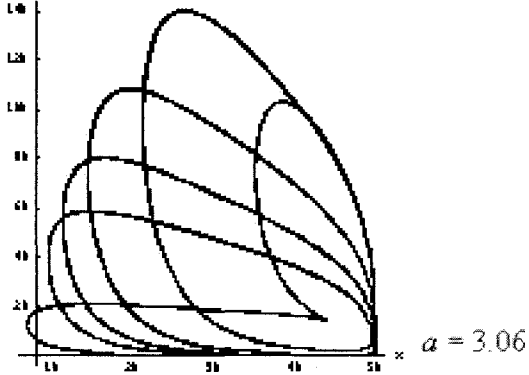
$c, d, e, f, g, d_1, d_2, t_3 = [3, 1, 1, 0.05, 1, 1, 0.05,$



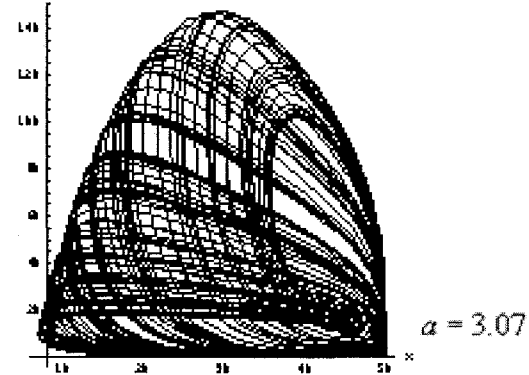
$, d, e, f, g, d_1, d_2, t_3 = [3.07, 1, 1, 0.05, 1, 1, 0.05$



$, d, e, f, g, d_1, d_2, t_3 = [3.2, 1, 1, 0.05, 1, 1, 0.05$



$, d, e, f, g, d_1, d_2, t_3 = [3.25, 1, 1, 0.05, 1, 1, 0.05$



Şekil 1. a parametresinde yapılan ufak değişimler sonucu meydana gelen periyot katlama.

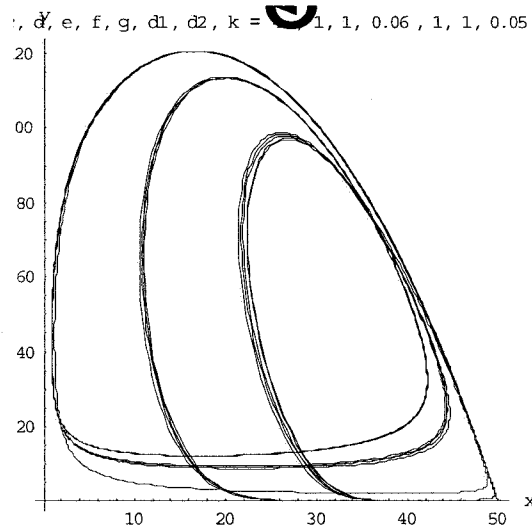
Şekil 1 de görüldüğü gibi periyot katlama limit çevrim ile başlamıştır.  $a$  kontrol parametresi değişirken limit çevrim kararsız hale gelip iki periyotlu bir yörünge doğurmuştur. Sonrasında ise bu parametredeki değişim arttıkça iki periyotlu limit çevrim kararsız hale gelmiş ve dört periyotlu limit çevrim doğurmuştur. Periyot katlama süreci sistemin hareketi kaotik olana kadar devam etmiştir. Bu süreç içerisinde yörüngeler kendini yinelenmemektedir.

Bu bölümde ayrıca model sistem (1)'in başlangıç koşullarına ve parametre değerlerine hassas bağıllığını sayısal çözüm yöntemleri kullanarak inceleyeceğiz. Bu amaçla, model sistem (1)'ün parametre değerleri aşağıdaki gibi alınmıştır:

$$a = 4, b = 1, c = 1, d = 0.06, e = 1, f = 1, g = 0.05, d_1 = 10, d_2 = 10, K = 50 \quad (2)$$

$$\text{ve } x_0 = 0.3, y_0 = 0.3, z_0 = 0.3$$

Başlangıç koşulları altında sistemin durumu şekil 2 de verildiği gibidir.



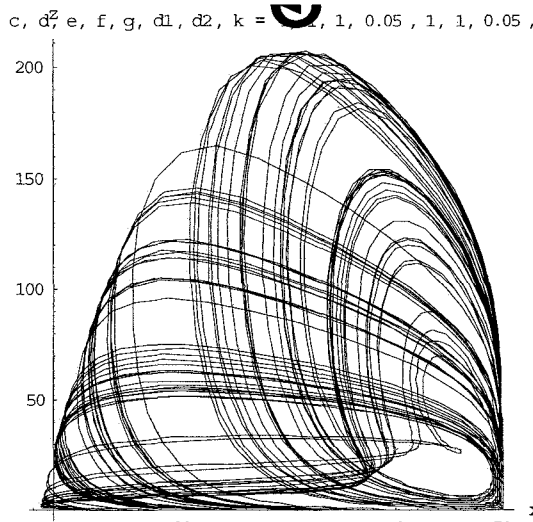
Şekil 2. Sistem (1) in

$a = 4, b = 1, c = 1, d = 0.06, e = 1, f = 1, g = 0.05, d_1 = 10, d_2 = 10, K = 50$  başlangıç koşulları altında durumu

Parametre değerleri

$$a = 4, b = 1, c = 1, d = 0.05, e = 1, f = 1, g = 0.05, d_1 = 10, d_2 = 10, K = 50 \quad (3)$$

başlangıç koşulları ise  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.03)$  olarak alındığında sistemin durumu şekil 3 de gösterildiği gibidir.



Şekil 3.  $a = 4, b = 1, c = 1, d = 0.05, e = 1, f = 1, g = 0.05, d_1 = 10, d_2 = 10, K = 50$  parametre değerleri ve  $(x_0, y_0, z_0) = (0.01, 0.03, 0.03)$  başlangıç popülasyonları altında sistemin durumu

(2) parametre değerleri altında sistem biyolojik olarak anlamlı üç adet denge noktasına sahiptir ve bu üç denge noktası da kararsızdır.

$E_0 = (0, 0, 0)$	$(4, -1, -1)$
$E_1(50, 0, 0)$	$(-4, 2, -1)$
$E_2(16.667, 71.1111, 0)$	$(2.5556, 0.16667 + 1.6245i, 0.16667 - 1.6245i)$

Tablo 1. Parametre değerleri (2) için sistemin denge noktaları ve karşılık gelen öz değerler

Parametre değerleri (3) aldığımızda sistemin sadece  $E_2$  denge noktası  $(20, 72, 0)$  olarak değişmiştir. Bu denge noktasına karşılık gelen öz değer ise

$$(2.6, 0.1.54919i, -1.54919i)$$

haline gelmiştir. Görüldüğü gibi her iki durumda da sistemin tüm denge noktaları kararsızdır. Parametre değerleri

$$a = 4, b = 1, c = 1, d = 0.02, e = 1, f = 1, g = 0.05, d_1 = 10, d_2 = 10, K = 50$$

olarak alındığında  $E_2$  denge noktası  $(50, 1.11022 \times 10^{-14}, 0)$  ve bu denge noktasına karşılık gelen öz değer  $(-4, -1, -4.62593 \times 10^{-17})$  haline dönüşmüştür ve sistem bu denge noktasında kararlıdır.

## SONUÇLAR

Yaşadığımız dünyada nonlinear bir yapıya sahiptir. Ekolojiksel modeller ya da türler arasındaki ilişkileri tanımlayan sistemler bu nonlinearliğin gözlemlendiği önemli modellerdendir. Bu modellerde etki ve tepkiler orantısız değildir. Önemli bir etki fark edilir derecede büyük sonuçlar doğurabilir. Etki ve tepki ya da sebep ve sonuçlar arasındaki bu orantısızlık “nonlinearlik” olarak adlandırılır. Kaos ve nonlinear dinamiklerin sağladığı yeni teoriksel kavramlar basit sistemlerin aniden meydana getirdiği karmaşık davranışları anlamamıza yardımcı olur. Kaos teorisinin önemli özelliklerinden birisi kelebek etkisi olarak bilinen başlangıç koşullarına hassas bağlıdır. Bu teori, ayrıca, periyodik olmayan sistemlerin davranışı hakkında uzun vadede tahminlerin yapılamayacağını açıklar. Bu çalışmada, ele alınan sistemin kaosa gidişindeki bu özelliklerde incelenmiştir.

## KAYNAKÇA:

- [1] Joy, M. P., [1996], “On the Integrability and Chaotic Behaviour of an ecological Model” Arxiv-Cho.Dyn. 9612003 v1.
- [2] Abarbanel, H. D. I., Brown, R., Sidorowich, J. J. & Tsimring, L. S. [1993] “The analysis of observed chaotic data in physical systems”, Rev. Mod. Phys. 65, 1331-1392.
- [3] Ablowitz, M. J., Ramani, A. & Segur, H. [1980] “A connection between nonlinear evolution equations and ordinary differential equations of P-type. I”, J. Math. Phys. 21, 715-721.
- [4] Gilpin, M. E. [1979] “Spiral chaos in a predator-prey model”, American Naturalist 107, 306-308..
- [5] Hastings, A. & Powell, T. [1991] “Chaos in a three species food chain”, Ecology 72, 869-903.
- [6] Joy, M. P. & Sabir, M. [1988] “Integrability of two dimensional homogeneous potentials”, J.Phys. A 21, 2291-2299.
- [7] May, R. M. [1976] “Some mathematical models with very complicated dynamics”, Nature 261, 459-467.
- [8] Klebano, A., Hastings A. Chaos in three species food chains. J Math Biol 1994;32:427-51.
- [9] Hsu SB, Hwang TW, Kuang Y. A ratio-dependent food chain model and its applications to biological control. Math Biosci 2003;181:55-83.
- [10] Gakkhar S, Naji MA. Order and chaos in predator to prey ratio-dependent food chain. Chaos, Solitons & Fractals 2003;18:229-39.
- [11] Liu XN, Chen LS. Complex dynamics of Holling type II Lotka-Volterra predator-prey system with impulsive perturbations on the predator. Chaos, Solitons & Fractals 2003;16:311-20.
- [12] May RM. Biological populations with non-overlapping generations: stable points, stable cycles, and chaos. Science 1974;186:645-7.
- [13] May RM, Oster GF. Bifurcations and dynamic complexity in simple ecological models. Am Natur 1976;110:573-99.
- [14] Zhang S, Chen L, Chaos in three species food chain system with impulsive perturbations, Chaos, Solitons & Fractals 2005;24:73-83.
- [15] Gakkar, S., Naji, R.K., 2003. Order and chaos in predator to prey ratio-dependent food chain, Chaos, Solitons and Fractals 18:229-239
- [16] Kara, R., Can, M., 2006. Ratio-Dependent Food Chain Models with Three Trophic Levels, International Journal of Computer Science, Volume 1, No: 2, pp. 85-92,
- [17] Kara, R., Can, M., 2006. Hopf Point Analysis for Ratio-Dependent Food Chain Models, Mathematical Biosciences, (submitted).
- [18] Kara, R., Can, M., 2006. Four and Five Dimensional Metapopulation Models, Iranian Journal of Science and Technology, (submitted), 2006.
- [19] Kara, R., Can, M., 2006. Chaos in Food Chain Models, Journal of Contemporary Mathematics, (submitted).